



TITLE:

仕事とリズム：オーバーワークに意味はあるか? (数学と生命現象の関連性の探究：新しいモデリングの数理)

AUTHOR(S):

山口, 諒; 根上, 春; 寺口, 俊介

CITATION:

山口, 諒 ...[et al]. 仕事とリズム：オーバーワークに意味はあるか? (数学と生命現象の関連性の探究：新しいモデリングの数理). 数理解析研究所講究録 2013, 1863: 38-48

ISSUE DATE:

2013-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195328>

RIGHT:

仕事とリズム ～オーバーワークに意味はあるか？～

Analysis of Mathematical Models on Work and Rest in Daily Life:
Efficient Strategy and Emergent Rhythms

*山口諒・†根上春・‡寺口俊介

*九州大学大学院システム生命科学府,

†東京大学大学院工学系研究科先端学際工学専攻,

‡大阪大学 WPI 免疫学フロンティア研究センター

*Ryo Yamaguchi, †Haru Negami and ‡Shunsuke Teraguchi

*Mathematical Biology Laboratory, Graduate School of System Life Sciences,
Kyushu University, Fukuoka, 812-8581, Japan

ryamaguchi@bio-math10.biology.kyushu-u.ac.jp

†Department of Advanced Interdisciplinary Studies,
Graduate School of Engineering,

The University of Tokyo, 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8904, Japan

negami@lsbm.org

‡WPI Immunology Frontier Research Center, Osaka University,

3-1 Yamadaoka, Suita, 565-0871, Osaka, Japan

teraguch@ifrec.osaka-u.ac.jp

In this work, we build mathematical models on work and rest in daily life and consider the amount of work achieved. We discuss what kinds of rhythms emerge depending on strategy to assign the limited amount of time in a day to work and rest, and how they affect efficiency. In the model which we consider here, we found an approximate conservation law where the amount of working time is approximately constant after averaging over a large number of days, independent of adopted strategies. This is a consequence of the assumption that the change of vitality is a linear function of the amount of time spent on work. Though this assumption is not always valid, the insight obtained from the model is still useful for analyzing more general situations. Based on these results, we also discuss cases where the working efficiency is not a constant. We find that, depending on the conditions, overwork or a steady work style results in higher efficiency.

1 はじめに

多くの生物には様々なスケールで活動と休息のリズムがみられる。例えば、一日の中でも、植物を始めとした光合成のリズム、動物にみられる一日の活動と睡眠のリズム等がある。このような一日を周期としたリズムは概日リズムと呼ばれ、その分子レベルでの制御基盤は近年徐々に明らかになっており、活発な研究がなされている。また、一年の間にも、植物であれば季節ごとの変動に対応した発芽、開花、結実等のリズム、動物であれば、繁殖、冬眠、渡り等のリズムを持っている。これら、日や年単位のリズムは地球の自転、公転と同期しており、地球上という環境に対して生物が進化的な時間スケールの中で適応してきた結果だと考えられる¹。また、これら以外にも、細胞分裂の周期や、呼吸や心臓の脈動など、必ずしも外部のリズムと同期している必要のないリズムも存在する。これらは、機能的な細胞集団数の維持に重要であったり、動物の物理的なサイズとの相関があったりすることが知られている。このように、生物においては様々なレベルでリズムを利用しており、それは進化スケールでの環境への適応の結果、獲得してきたものであると考えられる。積極的に外部環境に働きかけ、人工的な環境を作り上げてきた我々人間にも、同様のリズムの多くが引き継がれていることは明らかである。例えば、外部からの光刺激の存在

¹Bodenstein らは最近、季節の変化に対する個体レベルの概日リズムの適応にニューロンのネットワークの構造が重要な役割を果たしていることを、数理モデルを用いて議論している [1]。

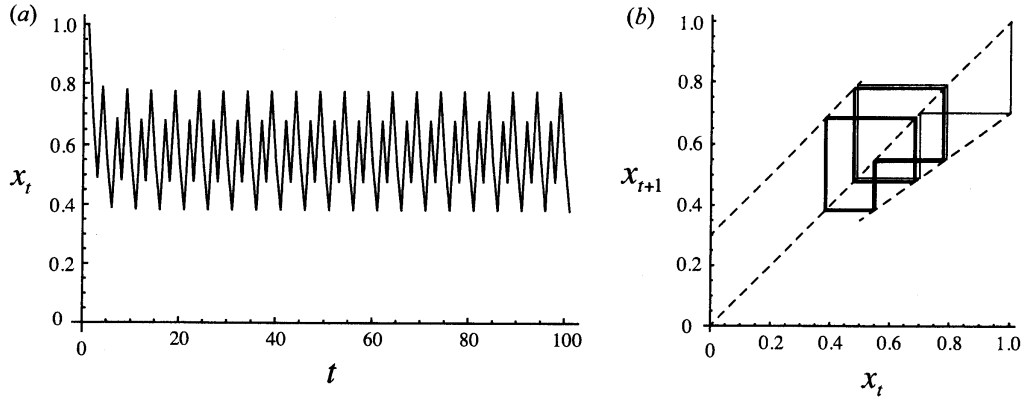


図 1: 閾値活動モデルのダイナミクス。パラメータとして $a = 0.3, r = 0.3, k = 0.5$ をとった場合を示している。(a) 体力の時系列。(b) 対応するリターンマップ。

しないような環境下での生活実験においても、ほぼ24時間での生活リズムが出現することはよく知られている。このように現代人においても、多くの場合、朝起きて、夜寝るという規則的なリズムを持っている。一方で、現代人特有の現象として、深夜になっても、照明や情報端末からの光刺激を浴びること等が大きな原因の一つと考えられる不眠症や、飛行機による短時間長距離移動によって生じる時差ボケなど、新しいリズム障害が起こっている²。また、人間の場合、通常、生活を維持するためになんらかの労働（仕事）が社会的に要求されるが、この仕事と休息のバランスもある種のリズムとして理解することもできるであろう。短い日数でできるだけ多くの仕事をこなすことが望まれる一方で、過度なオーバーワークは疲労の蓄積につながり、体調不良を引き起こすことで結果的に長期的な仕事の効率を妨げるように働くこともある。このような状況は、日常的に「リズムが乱れる」などとして表現されることも多い。このように、現代社会では個々の体力や能力、仕事の性質等に応じた仕事と休息に関するある種のリズムを維持することが効率的な仕事量の最適化に重要だと考えられている。本研究では個々人の疲労程度に応じて、労働量を制御する単純な数理モデルを用いて、このような現代社会に特有の仕事と休養のリズムをモデル化し解析し、どのようなリズムが結果的に総仕事量の最大化を行うか考察する。

2 閾値活動モデル

議論の出発点として、ここでは次の閾値活動モデルを考察する。各時間ステップ t ごとに個体の体力 x_t が定まっており、この体力がある閾値 k を超えている場合は活動可能とし、閾値以下の場合は活動不可能として休息をとるとする。また、活動可能な場合には、その時の体力に比例して活動を行うことで体力を消費すると仮定し、その比例係数を a とする。一方で、活動不可能な場合には一定量の休息を行うものと仮定し、ある定数 r だけ体力が回復するとする。ただし、どんなに休んでも体力の上限 $x_{\max} = 1$ を超えて体力が回復することはないとする。つまり、このモデルでの体力の時間変化は

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t - ax_t & \text{if } x_t > k \\ \min(x_t + r, 1) & \text{if } x_t \leq k \end{cases} \quad (1)$$

²勤務シフトによって生じる睡眠の質の低下の問題と、それに対する光刺激を利用した対策に関する数理モデルの例としては [2] がある。

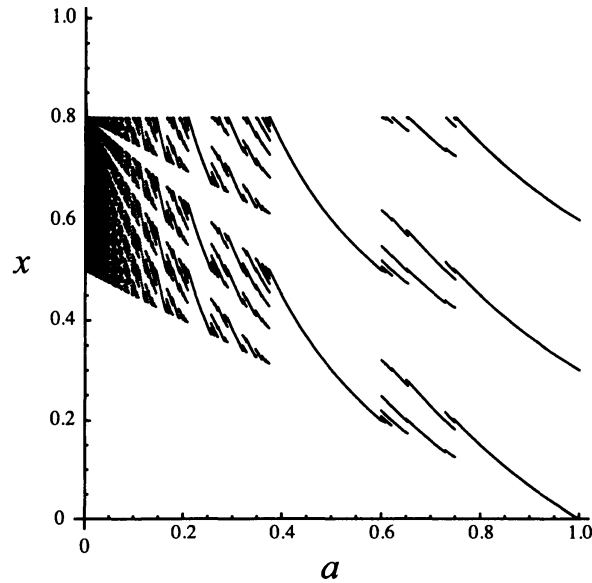


図 2: 閾値活動モデルの分岐図。 $r = 0.3, k = 0.5$ として a を変化させている。 $a = 0$ 付近では点が密集してものの、カオス的な振る舞いが現れるわけではない。

のように表わされる。また、時間ステップ t における仕事量は、

$$W_t = \begin{cases} ax_t & \text{if } x_t > k \\ 0 & \text{if } x_t \leq k \end{cases} \quad (2)$$

となる。より一般には同じ体力を消費したとしても個体の能力に応じて達成できる仕事量には差が出てくると考えられるが、ここではむしろ同一能力の個体間での戦略の違いに着目するため、そのような能力の違いは考慮しない。図 1 に、この閾値活動モデルの典型的なダイナミクスの例を示した。時間がたつにつれ初期値の依存性が消え、周期解に収束している様子がわかる。図 2 では、パラメータ a に関する分岐図を示した。パラメータの値により、様々な周期解が現れることがわかる。

この閾値モデルは体力に余裕がある限りは仕事を続け、体力が限界（閾値）以下になると休息をとるという抽象的なモデルであった。以下では、このモデルを現代社会における人間の仕事と休息に適用可能なモデルへと拡張を試みる。

3 一日サイクルの活動戦略モデル

前節で導入した抽象的な仕事と休息のモデルは非常に単純な構造をしており、解析も容易であった。しかしながら、今回の研究対象である現代社会における人間（労働者）の仕事と休息のモデルとしては、いくつかの問題がある。最初に問題になるのが、時間ステップ t の解釈である。前節のモデルでは体力に余裕がある限りいつまでも仕事を続け、 $x = k$ という限界を超えたところまとめて休息をとることになるが、実際の社会生活では多かれ少なかれ一日の単位で仕事と休息を繰り返すようなモデルが妥当であろう。このように、実際の社会生活への適用を考えると、時間ステップ t を一日と考え、その日その日の行動を体力に応じて調整するようなモデルの方が適切であると思われる。また、前節のモデルでは体力を個体が利用可能なリソースとして扱った。しかし、改めて考えてみると体力という概念を科学的に定義するのは簡単ではない。動物や植物の場合には体に蓄えた栄養が最も大事なリソースであるという状況は考えやすく、これをもって体力

と表現することが可能であるかもしれない。しかし、現代における労働者の場合、生理学的な栄養は基本的に十分であると考えられ、仕事の量を決定づけるリソースとは言いがたい。では、現代人において行動を規定する最も重要なリソースとはなんだろうか？ここでは、誰もが平等に24時間しか持たない「時間」をそのようなリソースとして提案したい。地球上で生活している限り、一日は誰にとっても24時間しかなく、その中で睡眠や食事あるいは娯楽といった休息にあてる部分と、仕事をする時間を作らなければならない。つまり、ここでモデル化する労働者が選択可能な戦略は、休息と仕事であって、それらの時間配分が問題となる。

今、一日のうち仕事に割く割合を $0 \leq a \leq 1$ とすると、休息に割く割合は $(1 - a)$ となる³。簡単のため、単位時間当たりにこなせる仕事量は一定であるとする、その日の仕事量 W_t は a に比例することになる。

$$W_t = wa \quad (3)$$

ここで、 w は時間当たりの仕事効率を表す。同様に、仕事にかけた時間に比例して体力が減る、休息にかけた時間に比例して体力が回復すると考えてみよう。また、今回も $x = 1$ は体力の上限であるとし、それ以上はどんなに休んでも体力は回復しないと仮定する。このとき、対応する漸化式は、

$$x_{t+1} = \min(x_t - ha + r(1 - a), 1) \quad (4)$$

のように表わせる。ここで h は疲労率、 r は回復率であり、考えているタイムスケールでは一定であると仮定する。これが、今回の体力の消費、回復モデルである。ここに現れるパラメータは、仕事の性質やその労働者の健康具合などによって一般に異なると考えられる。

このモデルは、一見、単に定数を足し（引き）続けるだけの自明なものに見えるが、実際には a というのは一日のうち仕事に割く時間の割合であり、このモデルにおける行動戦略を決定するパラメータである。このモデルで日によって変化するのは体力だけであるため、労働者は、その日の体力 x_t に応じてその日の戦略を決定すると仮定しよう。この時、仕事に割く時間の割合 a は実際には体力の関数 $a(x_t)$ となる。また、前節のモデルと同様に仕事ができる体力には下限があるとする。今回は、戦略次第で体力が負になることがあるため、0 を下限に置くのが便利である⁴。体力が下限以下になると、この労働者は働くことはできない。つまり、この場合には $a = 0$ という戦略を強制的に取らないといけないと理解できる。結局、この労働者の戦略は、 x の関数 $0 \leq A(x) \leq 1$ を用いて、

$$a(x) = \begin{cases} A(x) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

として表現される。以下では、このモデルにおいていくつかの具体的な戦略を考察する。

3.1 仕事時間一定の戦略

最も単純な戦略は常に一定時間の仕事を行うモデルで $A(x) = c$ ($0 \leq c \leq 1$) となる場合である。このとき、漸化式は

$$x_{t+1} = \begin{cases} \min(x_t - hc + r(1 - c), 1) & \text{if } x > 0 \\ \min(x_t + r, 1) & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

となる。 $c < r/(r + h)$ であれば、 $x > 0$ において体力は単調増加であり、結局 $x = 1$ が安定解となる。この際 $x = 1$ では体力の最大値による制限により体力の回復が無駄になってしまっている。

³例えば、 $a = 1$ という極端な場合であれば、全く休みをとらず徹夜で仕事をこなしている状況であり、 $a = 0$ であれば一日仕事をせず、完全に休養している状況に対応することになる。

⁴実際、前節のモデルにおいても、 x の平行移動とスケール変換で下限を0におくことは可能である。このとき、 $x_{t+1} - x_t$ には x_t に比例する項に加えて定数項が現れる。

これは本来こなせる仕事量をこなしていないと言う意味で、“サボっている”状況だと解釈できるかもしれない。また、 $c = r/(r+h)$ では、疲労と回復が釣り合い、体力は初期値 x_0 から変化しない。これは適切な仕事量をこなしている状況だと言える。逆に $c > r/(r+h)$ であれば、 $x \geq 0$ において、いつも労働過剰となるため、 $x \geq 0$ で体力が減少するフェイズと $x < 0$ で体力が回復するフェイズを交互に繰り返すことになる。このような不安定な状態は一種のオーバーワークと体調不良による休養を繰り返している状況といえるだろう。このように、仕事時間一定の戦略では、適切な仕事時間を続ける状況は、体調の変化（ r や h の微妙な変化）があると簡単に不安定化し、体力の回復の無駄がでたり、オーバーワークと体調不良により仕事時間にむらが生じてしまうことがわかる。

3.2 線形仕事時間の戦略

次に、 $A(x) = bx + c$ のような線形な関数を仮定してみよう。（ただし、 $0 \leq c \leq 1$, $-c \leq b \leq 1-c$, $b \neq 0$ とする。）

$$x_{t+1} = \begin{cases} \min((1 - b(h+r))x_t - hc + r(1-c), 1) & \text{if } x > 0 \\ \min(x_t + r, 1) & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

特に、 $b > 0$ の場合、このような戦略は体力があるほど時間を仕事に割り当てるという点で、自然な戦略といえるだろう⁵。このシステムの固定点を調べてみよう。まず、仕事時間一定の戦略の時と同様、 $x = 1$ が安定な固定点となる状況では体力の回復を無駄にする状況に陥る可能性がある。これが起こるのは $x_t = 1$ の時に $x_{t+1} = 1$ となる状況なので、

$$b + c \leq \frac{r}{h+r} \quad (8)$$

の時である。この場合は、（等号が成り立つ場合を除いて、）体力の回復に無駄が生じてしまう。

一方、非自明な固定点の候補は

$$\bar{x} = \frac{r - (h+r)c}{(h+r)b} \quad (9)$$

である。この点が存在するためには、 $0 < \bar{x} \leq 1$ でなければならない。この条件は、

$$\begin{cases} c < \frac{r}{h+r} \leq b + c, & b > 0 \\ b + c \leq \frac{r}{h+r} < c, & b < 0 \end{cases} \quad (10)$$

と表現でき、任意の $r, h > 0$ に対して、この条件が成り立つような b, c を選ぶことが可能であることがわかる。また、この固定点が安定であるのは、式 (7) の x_t の係数の絶対値が 1 より小さい時である。つまり、

$$0 < b < \frac{2}{h+r} \quad (11)$$

なお、この固定点での仕事にかかる時間の割合は一定値 $a(\bar{x}) = r/(h+r)$ となる。つまり、戦略の詳細（ b, c の正確な値）に依らず、疲労率、回復率のみによって決まる。この仕事時間の割合は、仕事時間一定戦略における適切な仕事時間と同じである。しかし、この固定点が存在し、安定であるためには、上の二つの不等式 (10)、(11) を満たせば十分であり、仕事時間一定戦略において必要とされたような厳密な等式が成り立つ必要はない。このように、線形仕事時間の戦略でも一定の仕事時間を与えることができるが、仕事時間一定戦略と異なりこの戦略は体調の変化に対し

⁵なお、 $b > 0$ で $c = 0$ の場合には、このシステムは動変数 $x(t)$ に上限があることを除けば、[3, 4] で考察された樹木の資源収支モデルと同等である。

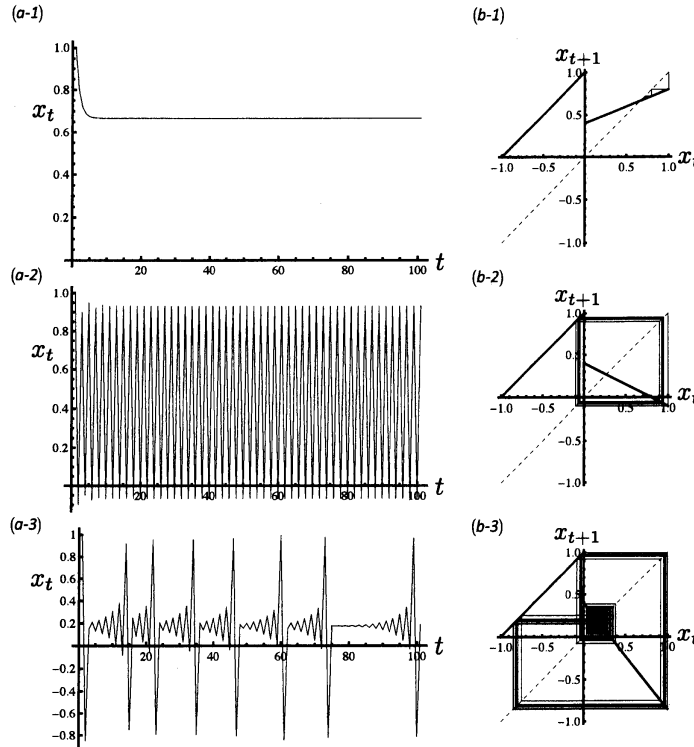


図 3: 一日サイクルの活動戦略モデルの (a) 体力の時系列と (b) リターンマップ。(1) 収束解 ($b = 0.2, c = 0.2, r = 1.0, h = 2.0$)。 (2) 2 周期 ($b = 0.5, c = 0.2, r = 1.0, h = 2.0$)。 (3) カオス ($b = 0.75, c = 0.2, r = 1.0, h = 2.0$)。

てロバストなものとなっている。図 3-1 は、このような固定点が存在し、そこへ収束する場合の例である。一方、図 3-2 の例では、このような固定点は存在しているものの、固定点には収束せず、周期 2 の周期解に収束する例である。ここでは固定点近傍の振る舞いしか注目していないため、上記の解析からはこのような周期解にトラップされるかどうかはわからないことに注意が必要である。

一方で、この条件 (11) を満たさない場合にはこの固定点是不安定化する。この場合も一定の仕事時間を保つために適切な仕事時間を超えて働いている状況が起こっており、一種のオーバーワークを起こしている状況だと解釈できるだろう。例えば、 $b > 0$ という合理的な状況においては $b \leq 1 - c \leq 1$ であるので、この条件 (11) を満たせない可能性がでるのは、 $2 < h + r$ をという状況においてである。このような状況においては、図 3-3 の例にあるようにカオス的な振る舞いも現れ得る。体力の時間変化がカオスであるかどうかを判別するため、ここではリアプノフ指数を用いている。リアプノフ指数は誤差の指数的増大の速さを表し、カオスの特徴の 1 つである予測不可能性の定量的な判断材料となる。力学系を定める 1 次元写像を $f(x)$ とすると、リアプノフ指数 λ の定義は、

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right| \quad (12)$$

で与えられる。式 (7) の下では、

$$\frac{df}{dx} = \begin{cases} 1 - b(h + r) & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

となる⁶。 $(1 - b(h + r))$ のみがリアプノフ指数 λ に貢献し、また、体力がほとんどすべての点で0を下回る状況も起こり得ないため、結局 $|1 - b(h + r)| > 1$ がカオス的な動態を示す条件となる。図4ではパラメータ b を変化させた時の (a) 分岐図と (b) リアプノフ指数を示している。 $b > 2/3$ ではリアプノフ指数が正であり、カオスが生じていることがわかる。

3.3 活動戦略モデルにおける仕事時間 ～総仕事時間の保存則～

次に、この過程で労働者が行う仕事の量についても考察してみよう。上で見たように、固定点が存在する状況における仕事時間の割合は、戦略とそれに伴う固定点の位置の違いに関わらず、 $a(\bar{x}) = r/(h + r)$ と一定であった。実は、この性質は固定点への収束解だけに限らず、長期にわたって平均化すると（体力が上限である $x = 1$ によって制限されることのない）一般の状況に対しても基本的に成り立つ性質である。これを見るために、十分長い時間 T 後の状態を考える。

$$x_T = x_0 + \sum_{t=1}^T \delta x_{t-1} \quad (14)$$

ここで、

$$\delta x_t \equiv x_{t+1} - x_t = r(1 - a(x_t)) - ha(x_t) \quad (15)$$

である。今、 x_T は、 $x_T \in [-h, 1]$ であるはずなので、

$$-h \leq x_0 + \sum_{t=1}^T \delta x_{t-1} \leq 1 \quad (16)$$

これを変形すると、

$$\frac{r + (x_0 - 1)/T}{r + h} \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T a(x_{t-1}) \leq \frac{r + (x_0 + h)/T}{r + h} \quad (17)$$

結局、仕事時間の平均は

$$\bar{a} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T a(x_{t-1}) = \frac{r}{r + h} \quad (18)$$

となり、上記の固定点での値と変わらない。言葉を変えると、時間 T に渡っての総仕事量は誤差 $w(h + 1)/(r + h)$ の範囲内で、戦略に関わらず一定値 $\frac{wrT}{r+h}$ を取るという一種の保存則が成り立っている。このような保存則は、式(4)で定義される体力モデルにおいて、体力の減少、及び、体力の回復が、仕事時間と休憩時間にそれぞれ比例するという仮定からの直接の帰結である。この仮定は必ずしも現実的なものとは限らないが、このモデルは総仕事量に関して“中立”な結果を出すという意味で、あり得る様々な拡張モデルのベースになる“標準”モデルと位置付けることができるだろう。図4cは戦略パラメータ b を変化させた際の、仕事時間の平均（～総仕事量）である。固定点への収束解が、二周期解やカオスに分岐しても、総仕事量には変化がない。

4 活動戦略モデルの拡張

前節では、一日サイクルの活動戦略モデルを提案し、そこでは総仕事時間の保存則が成り立つことを見た。本節ではこの標準モデルを拡張したモデルを考察してみる。

⁶体力の回復が上限を上回り、最大値の1に制限される場合はここでは考えていない。その場合には、強制的に同じ状態に戻されるため結果的にカオスは抑制される。例えば、 $r > 1$ の場合、 $x < 0$ となって休息をとった場合、体力が $x = 1$ に戻されカオスが抑制されることがある。

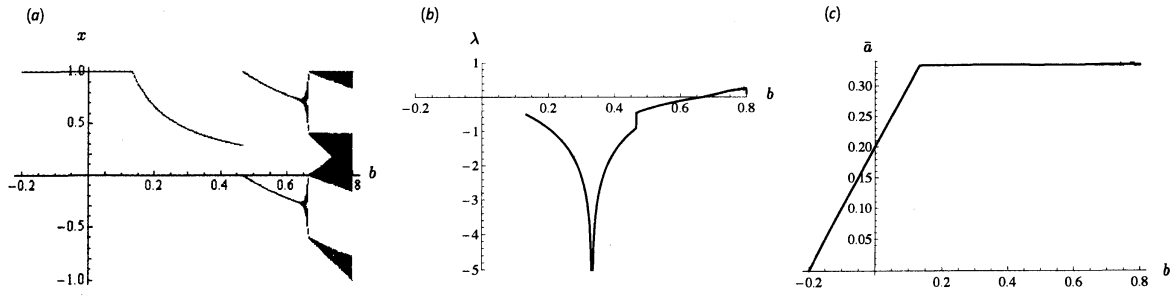


図 4: 一日サイクルの活動戦略モデルの (a) 分岐図と (b) リアプノフ指数と (c) 仕事時間の平均。 $c = 0.2, r = 1.0, h = 2.0$ として b を変化させている。

4.1 体力に依存した仕事効率モデル

前節では簡単のため仕事量は仕事時間 $a(x)$ に比例すると仮定した。この仮定の拡張として、仕事効率 w をより一般の関数に拡張する。例えば、一つの拡張として w を（仕事開始時点での）体力の関数とみなすことが考えられる。

$$W_t = w(x)a(x) \quad (19)$$

十分な体力があるほど仕事の質が高まるという自然な状況を考えると、 $w(x)$ は x の増加関数である。この場合、前節での考察から直ちに、不必要な休憩を行なうことなく常に $x = x_{max} = 1$ であり続けるような戦略が総仕事量を最大化することがわかる。線形な戦略の範囲で考えれば、式 (9) の固定点 \bar{x} がちょうど 1 となるような戦略、即ち、

$$b + c = \frac{r}{h + r} \quad (20)$$

で、かつ、 $b < 2/(h + r)$ であるような“無理をしない戦略”が最適な戦略となる⁷。

4.2 仕事時間に依存した仕事効率モデル

別の可能性として、仕事効率 w が仕事時間 a の関数である場合を考えてみよう。より正確には、仕事効率 w はその日のその時点までの仕事時間 τ に依存し、 $w(\tau)$ となる状況である。この時、一日の仕事量は

$$W_t(a(x)) = \int_0^{a(x)} w(\tau) d\tau \quad (21)$$

となる。この場合、仕事の性質、あるいは、個人の資質に応じて、大きく二つの可能性が考えられるだろう。

- $w(\tau)$ が τ の減少関数である場合
これは、仕事時間が長引くにつれて疲労や集中力の低下により効率が落ちていく状況に対応する。
- $w(\tau)$ が τ の増加関数である場合
これは、まとめて仕事を片付けることによって、仕事効率を高められる状況に対応する。

⁷ より一般の戦略であっても、 $x = 1$ 近傍の線形近似で上記の条件を満たすものであれば、少なくとも初期値 $x = 1$ から出発する限り、同様に最適な戦略となる。

ここでは、 $w(\tau)$ を τ の線形関数の範囲で議論してみよう。

$$w(\tau) = w_c + w'\tau \quad (22)$$

また、仕事効率 $w(\tau)$ が負となってしまうと、それまでに行った仕事量が更なる仕事により減少することとなって不合理である。そのため、 $0 \leq \tau \leq 1$ の間で $1 \leq w(\tau)$ 、すなわち、 $-w_c \leq w'$ という状況を考えることにする。この状況では、基本的に仕事量は仕事時間が長いほど多くなる。前節で見たように、仕事時間の平均は（サボらない限り）戦略によらず一定であった。そのため、総仕事量の仕事効率の定数部分 w_c からの寄与は前節のモデルと同様で保存則が成り立つ。一方、総仕事量に対し今回新しく加わる寄与は、

$$\delta W = \sum_{t=1}^T \frac{w'}{2} a_{t-1}^2 \quad (23)$$

となる。近似的に

$$\sum_{t=1}^T a_{t-1} = \frac{rT}{r+h} \quad (24)$$

であったので、この条件の下で δW を最大化する事を考えると、ラグランジュの未定乗数 λ を導入して、

$$f(\lambda, \{a_{t-1}\}) = \sum_{t=1}^T a_{t-1}^2 + \lambda \left(\sum_{t=1}^T a_{t-1} - \frac{rT}{r+h} \right) \quad (25)$$

の極値を求める問題となる。ここで極値となるのは、

$$a_{t-1} = \frac{r}{r+h} \quad (26)$$

の時で、

$$f = \frac{r^2 T}{(r+h)^2} \quad (27)$$

と求まるが、これは実際には f の極小値である。結局 $w' < 0$ の時、つまり、仕事時間が長引くにつれて疲労や集中力の低下により効率が落ちていく状況においては、安定な固定点を持つような戦略が総仕事量を最大化する。

逆に、 $w' > 0$ の時には安定な固定点が最も総仕事量を小さくすることになる。この時には例えばカオスを起こすような戦略が安定な固定点を持つ戦略よりも仕事量を大きくすることになる。図5に、様々な仕事効率のモデルにおいて、戦略に応じてどのように総仕事量に変化するかを示すヒートマップを示した。このように、仕事効率が一定でない一般の場合には、総仕事量も、各戦略によって生じるリズムの違いに左右されることがわかる。

5 まとめと議論

本研究では単純な離散ダイナミクスを用いて、仕事と休息のリズムのモデル化を行った。そこでは、全ての人が平等に持つリソースと言える時間を、その日の体力に応じてどのように仕事と休息に振り分けるかという戦略に基づき、どのようなリズムが生まれ、最終的な仕事量にどう影響するかを議論した。特に、今回考えたモデルでは、戦略に応じて、固定点、周期解、カオスなど、様々なリズムが現れるにも関わらず、（体力の最大値により回復に無駄が生じない限り）戦略によらず仕事時間の平均が一定になると言う一種の保存則が成り立つことがわかった。これは、仕事時間、休息時間に比例して体力が増減するという仮定の帰結である。また、仕事効率が定数の場

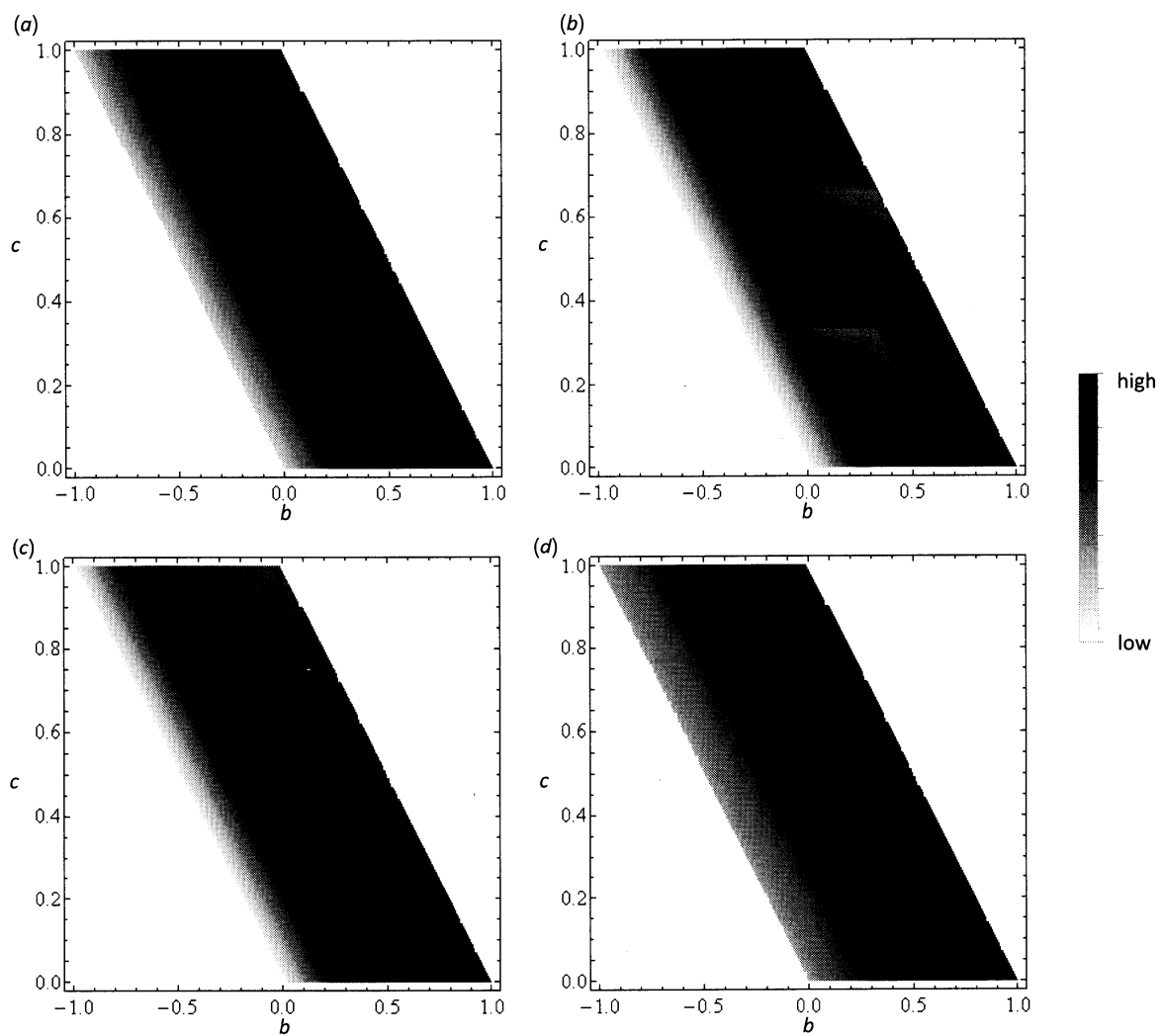


図 5: 総仕事量のヒートマップ。パラメータは $r = 1.0, h = 2.0$ 。(a) 仕事効率一定の場合、(b) 仕事効率が体力の増加関数の場合、(c) 仕事効率が仕事時間の減少関数である場合、(d) 仕事効率が仕事時間の増加関数である場合。

合には総仕事量も戦略によらず一定となることがわかる。このように、今回考えたモデルは総仕事量が一定となる一種の“中立”なモデルであり、ここでの仮定が部分的に成り立たない拡張されたモデルの解析の基点ともなる標準モデルとして機能する。本研究の最後では、仕事効率が定数でなく、その日の体力に依存する状況や、一日の仕事時間に依存する状況も考察してみた。特に、体力に依存する状況や、仕事時間に比例して仕事効率が悪くなる場合の解析では、“標準モデル”の結果を援用することで解析的な考察が可能となった。また、まとめて仕事をするほど効率が上がるような条件では、数値シミュレーションにより、毎日の仕事時間が一定の安定なリズムよりも、オーバーワークを含むむらのあるリズムを持った戦略の方が結果的に仕事量が増えることをみた。

本研究では、“体力”を基本的な力学変数として、仕事と休息のリズムのモデル化を行った。最後に、蛇足ではあるが、体力の意味について議論してこの考究録の終わりとしていたい。体力という概念は日常的にもよく使われるが、これを明確に定義するのは難しい。“体力”という言葉によって想起される概念には、タイムスケールの異なる二種類の考え方があるように思われる。一つは、数ヶ月、数年といった長いタイムスケールにおける体力である。例えば、「加齢とともに体力が落ちた」等で表現されるのは後者の体力であろう。このような体力は、今回のモデルでは、疲労率や回復率といったパラメータによって表現できていると思われる。例えば、若く体力があるときには総仕事量を最大化していた戦略であっても、加齢によりこれらのパラメータが長期的に変化した際にはそこから生じるリズムが変化し、無駄の多い戦略となる例もあるだろう。一方で、今回力学変数として扱った体力は、一日といった比較的短いタイムスケールで現れる概念であり、その日の疲労に逆相関するような概念である。今回、この体力に基づく数理モデルを立てる上で、その物理的、生理学的実体について議論を行った。日常生活では、様々な活動と共に疲れを感じ、休息をとらなくてはならない限界を感じることは常識的である。しかし、そこに関係する要素を並べ上げても、筋肉疲労、睡眠、免疫力、栄養、食事など様々な要素が絡んでおり、体力の客観的な物理的、生理学的実態を明快に定義することは難しい。それにも拘らず、本研究のモデルのように、その日の残体力に応じて活動量を変化させるというのは、直感的に理解できるのではないだろうか。むしろ、このモデル化によって見えてきたのは、客観的な体力の概念ではなく、半ば逆説的ではあるが「活動量を決定するために利用できるバロメーター」としての体力という概念である。もしかすると、日常的に使われている体力という概念は、膨大な種類の体内の状態変数を直感的に把握するために人類が獲得してきた主観的なセンサーのようなものである、と捉えるべきであるのかもしれない。

参考文献

- [1] Bodenstein, Christian and Gosak, Marko and Schuster, Stefan and Marhl, Marko and Perc, Matjaž, “Modeling the Seasonal Adaptation of Circadian Clocks by Changes in the Network Structure of the Suprachiasmatic Nucleus”, *PLOS Computational Biology*, 8, 9, e1002697 (2012)
- [2] Postnova, Svetlana and Robinson, Peter A and Postnov, Dmitry D, “Adaptation to Shift Work: Physiologically Based Modeling of the Effects of Lighting and Shifts’ Start Time”, *PloS one*, 8, 1, e53379 (2013)
- [3] Isagi, Y and Sugimura, K and Sumida, A and Ito, H, “How does masting happen and synchronize?”, *Journal of Theoretical Biology*, 187, 2, 231–239, (1997)
- [4] Satake, Akiko and Iwasa, Yoh, “Pollen coupling of forest trees: forming synchronized and periodic reproduction out of chaos”, *Journal of Theoretical Biology*, 203, 2, 63–84 (2000)